Programación Lineal

Elementos de un modelo de decisión

Un **Modelo de decisión**, es solo un medio para **resumir un problema** de decisión en forma que permita la identificación y evaluación sistemática, de todas las opciones de decisión del problema. Así se llega a una decisión escogiendo la opción que se considera como la **mejor entre todas las disponibles.**

Componentes básicos del proceso de toma de decisión:

- Opciones de decisión. ¿Cuáles son las posibles opciones?
- Restricciones del problema: formular un criterio apropiado que se pueda aplicar para comparar las opciones factibles dadas, en oposición a las soluciones no factibles
- Criterio objetivo: identificar todas las opciones factibles del problema de decisión si se tiene interés en lograr la mejor solución. Obtener la solución óptima (max o min)

El modelo se define como una función objetivo y restricciones que se expresan en términos de las variables (opciones) de decisión del problema. La simplificación de un sistema con el fin de construir un modelo de concentrarse, fundamentalmente, en la identificación de las variables y restricciones dominantes y también en otros que se juzguen pertinentes para la toma de la decisión.

Tipo de modelos de Investigación de Operaciones

Modelo Matemático: la función objetivo y las restricciones del modelo se pueden expresar en forma cuantitativa o matemática como funciones de las variables de decisión. Este método es poco utilizado en sistemas complejos.

Simulación: Divide el sistema representado en módulos básicos que después se enlazan entre si vía relaciones lógicas bien definidas. Mejor para sistemas complejos, pero costoso y ocupa mayor tiempo.

Fases en la implementación de un modelo

1. Definición del Problema: Indica 3 aspectos:
   - Una descripción de la meta o el objetivo del estudio.
   - Una identificación de las alternativas de decisión del sistema.
   - Un reconocimiento de las limitaciones, restricciones y requisitos del sistema.
2. Construcción del modelo: se debe elegir el que más se ajuste para representar al sistema
   - Matemático
   - Heurístico: algoritmo de optimización
   - Simulación
3. Solución por el modelo:
   - a Matemático: optimización bien definida. Proporciona una solución óptima.
   - Simulación o heurístico: el concepto de optimidad no está bien definido. Obtiene evaluaciones aproximadas de las medidas del sistema.
   - Análisis de sensibilidad: información sobre el comportamiento de la solución debido cambios en los parámetros de sistema.
4. Validación del modelo: Un modelo es válido si, independientemente de sus inexactitudes al representar el sistema, puede dar una predicción confiable del funcionamiento del sistema. Para comparar su funcionamiento lo hacemos con datos pasados.

Programación Lineal

La Programación Lineal corresponde a un algoritmo a través del cual se resuelven situaciones reales en las que se pretende identificar y resolver dificultades para aumentar la productividad respecto a los recursos (principalmente los limitados y costosos), aumentando así los beneficios.

Es un método de planificación que permite elegir el plan óptimo correspondiente al valor extremo (máximo o mínimo) de un objetivo expresado bajo la forma de una función lineal de las actividades posibles, respetando las restricciones, de tipo lineal, que limitan la existencia de dichas actividades. Las relaciones matemáticas lineales tan solo significan que todos los términos utilizados en la función objetivo y en las restricciones son de primer grado (es decir, no se elevan al cuadrado, al cubo o a una potencia mayor, ni se presentan más de una vez).

La PL es una herramienta determinística, es decir, todos los parámetros del modelo se supone conocidos con certeza. Sin embargo, en la vida real, es difícil encontrar un problema donde prevalezca una verdadera certeza respecto a los datos.

La técnica de PL compensa esta deficiencia, proporcionando análisis sistemáticos postoptimos y paramétricos, que permiten al tomador de decisiones probar la sensibilidad de la solución óptima estática, respecto a cambios de los parámetros del modelo.

Supuestos de la Programación Lineal

El término lineal implica que las relaciones de insumo-producto y las combinaciones entre insumos son fijas.

Proporcionalidad es la contribución de cada variable a la función objetivo es directamente proporcional al nivel (valor) de la variable, esto significa que si la producción de una unidad de un producto utiliza tres horas, la producción de 10 unidades tomaría 30 horas.

Adición significa que el total de todas las actividades es igual a la suma de las actividades individuales. Por ejemplo: si producimos dos tipos de bienes, uno que nos reporte un beneficio de 3 $/unidad, y otro que nos reporte un beneficio de 5$/unidad, la producción de un bien de cada tipo supondrá un beneficio total de 8 $

Se supone que existen condiciones de **certeza**, es decir, se conocen con certeza el valor del parámetro en la función objetivo y en las restricciones, y no cambia durante el periodo de estudio.

Se hace la suposición de **divisibilidad**: las soluciones no necesitan ser números enteros. Por el contrario, son divisibles y quizá tomen cualquier valor fraccionario.

Por último, se supone que todas las respuestas o las **variables son no negativas**. Los valores negativos de las cantidades físicas son imposibles, pues sencillamente no se puede fabricar un número negativo de sillas, camisas, lámparas o computadoras.

Para Resolver un Problema de Programación Lineal Debemos:

Definir el criterio de la Función Objetivo

Identificar y definir variables

Identificar y definir restricciones

Función Objetivo $Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$

Variables $X_1 X_2 \ldots X_n$

Restricciones

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \leq b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n \text{¿} b_2$$
$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n \leq b_m$$

$$X_1 , X_2 \ldots X_n \geq 0$$

Función Objetivo

La función objetivo tiene una estrecha relación con la pregunta general que se desea responder. Si un modelo resulta en distintas preguntas, la función objetivo se relacionaría con la pregunta del nivel superior, es decir, la pregunta fundamental. Todos los problemas buscan *maximizar* o *minimizar* alguna cantidad, por lo general la utilidad o el costo. Nos referimos a esta propiedad como la **función objetivo** de un problema de PL. Así por ejemplo, si en una situación se desean minimizar los ***costos***, es muy probable que la pregunta de mayor nivel sea la que se relacione con aumentar la utilidad en lugar de un interrogante que busque hallar la manera de disminuir los costos.

Pregunta fundamental / Función Objetivo

¿Cómo se pueden disminuir los costos de inventario?	**Minimizar**
¿Qué se debe hacer para mejorar las utilidades netas de la compañía?	**Maximizar**

La función objetivo: La llamaremos "z" es una función lineal que se procura maximizar o minimizar, es una función restringida por una serie de inecuaciones que representan a las disponibilidades de recursos y a los usos que cada actividad hace de los mismos, indicados a través de sus coeficientes técnicos unitarios de la actividad.

Veremos el caso de una función que procura maximizar beneficios. La función Objetivo (FO): Maximizar beneficios (Z), recibe también el nombre de funcional.

Max Z = $C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$

Expresado como sumatoria, tenemos la siguiente expresión equivalente a la anterior:

Max Z = $\sum_{1}^{n} C_j X_j$

Dónde:

Z = función objetivo. Generalmente el margen bruto total para maximización y costo total en minimización

X$_j$ = dimensión de la actividad A$_j$, con j = 1, 2, . . . ,n. que se la obtiene en la solución que ofrece la programación lineal, es decir cuánto se usará de esta actividad o recurso. (Kg de alimento, Kg de fertilizante, etc.)

C$_j$ = coeficientes técnicos unitarios con j = 1, 2, . . . ,n., Representa en cuanto se producirá una variación en la función objetivo Z ante una variación en una unidad de la actividad. En el caso de maximización este coef. será el Margen bruto ($/unidad) y en minimización serán los costos por unidad.

Variables de decisión

Las variables de decisión, son en teoría, factores controlables del sistema que se está modelando, y como tal, estas pueden tomar diversos valores posibles, de los cuales se precisa conocer su valor óptimo, que contribuya con la consecución del objetivo de la función general del problema.

$$X = (X_1, X_2, \ldots X_n)$$

Variables de decisión, parten de la función objetivo		
Minimizar los costos de mantenimiento		
¿Qué cantidad de productos deben ordenarse por periodo?	¿Qué nivel de inventario deberá mantenerse al final de cada periodo?	¿En cuales períodos deberá ordenarse, y en cuales no?

Restricciones

Cuando hablamos de las restricciones en un problema de programación lineal, nos referimos a una serie de limitantes, tanto físicas, como de contexto, de tal manera que los valores que en un momento dado podrían tomar nuestras variables de decisión, se encuentran condicionados por una serie de restricciones.

Maximización

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \leq b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \text{¿} b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

Minimización

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \geq b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \geq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \geq b_m$$

b_i con i = 1, 2, . . . , m . Indica la cantidad de recurso i disponible o dimensión de la restricción i.

a_{ij} Son los coeficientes técnicos unitarios, indican los requerimientos unitarios de ese insumo para el desarrollo de cada actividad.

Holgura y excedente

Además de conocer la solución óptima al problema de un programa lineal, es útil saber si se están utilizando todos los recursos disponibles. Se emplea el término holgura para la cantidad de un recurso que no se utiliza. Para una restricción menor que o igual

Holgura (cantidad de recursos utilizados) ≤ (cantidad de recursos disponibles)

El término excedente se emplea con las restricciones mayor que o igual a para indicar la cantidad en que se ha superado el lado derecho de una restricción. Para una restricción mayor que o igual a,

Excedente (cantidad real) ≥ (cantidad mínima)

Restricción ≤: Representa el límite de la disponibilidad de un recurso.

Restricción ≥: Establece requisitos mínimos, en cuyo caso la variable de exceso representa la cantidad de exceso con la que satisface la especificación mínima.

Las restricciones de no negatividad significan que siempre se está trabajando en el primer cuadrante (el noreste) de una gráfica.

Restricciones no negativas significan $X_1 \geq 0$ y $X_2 \geq 0$.

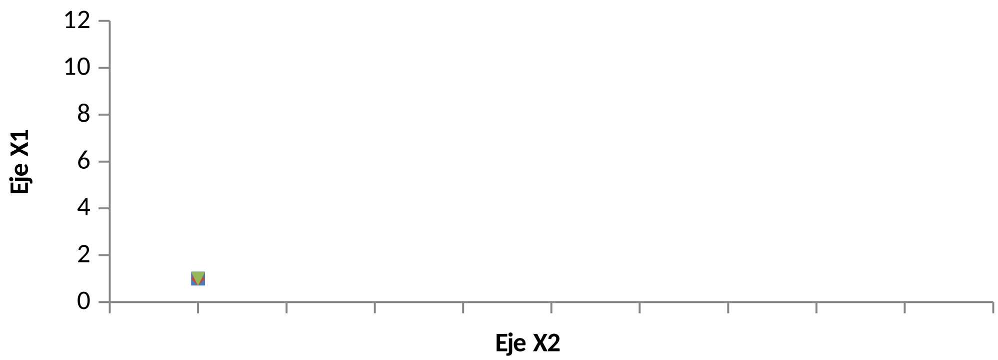
Solución gráfica a un problema de PL

La forma más sencilla de resolver un problema pequeño de PL es con el método de solución gráfica. El procedimiento gráfico únicamente es útil cuando existen dos variables de decisión en el problema. Cuando hay más de dos variables, no es posible mostrar la solución en una gráfica bidimensional y se debe recurrir a enfoques más complejos.

Para encontrar la solución óptima de un problema de PL, primero se debe identificar un conjunto, o región, de soluciones factibles, que satisfaga todas las restricciones en forma simultánea. El primer paso para hacerlo consiste en graficar cada restricción del problema. Las variables X_1 *y* X_2 se representan en los ejes de la gráfica. La notación (X_2,X_1) se utiliza para identificar los puntos de la gráfica. Las restricciones de no negatividad significan que siempre se está trabajando en el primer cuadrante (el noreste). $X_2,X_1 \geq 0$

Los valores de las Variables X_1 y X_2 se dice que constituyen una solución factible si satisfacen todas las restricciones del modelo, incluyendo las restricciones de no negatividad. Cualquier punto fuera de la zona sombreada representaría una solución no factible.

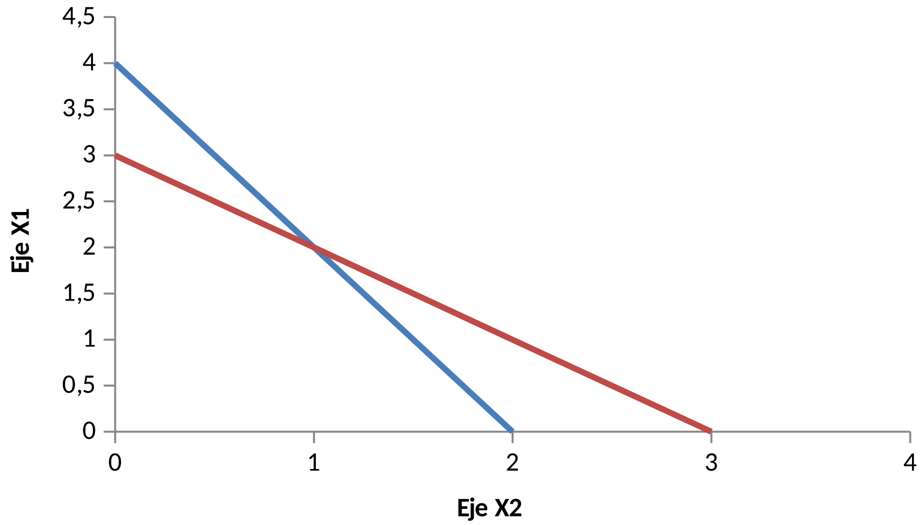
Una ecuación lineal con dos variables es una recta. La forma más fácil de trazar la recta es encontrar cualesquier dos puntos que satisfagan la ecuación y, después, dibujar una recta que pase a través de ellos. Los dos puntos más fáciles de encontrar son generalmente los puntos en los cuales la recta interseca los ejes X_1 y X_2.



El espacio encerrado por las restricciones restantes se determina sustituyendo en primer término "≥ o ≤" por "=" para cada restricción, con lo cual se produce la ecuación de una línea recta. Después se traza cada línea recta en el plano (X,Y) y la región en la que se encuentra cada restricción cuando se considera la desigualdad, lo indica con el signo ≥ o ≤.

Si (0,0) satisface la desigualdad, la dirección factible de incluir al origen, si no es así debe estar del lado opuesto.

Para obtener la solución óptima (max o min), desplazamos la recta del ingreso hasta el punto donde cualquier incremento adicional en el ingreso produciría una solución factible. La elección de un punto depende de la pendiente de la función objetiva.



Clases de solución Los principales tipos de solución:

Solución no factible

Cuando no hay solución a un problema de PL que satisfaga todas las restricciones dadas, entonces existe una solución no factible. Gráficamente, esto significa que no hay una región de solución factible: una situación que ocurriría si el problema se formuló con restricciones en conflicto. Esto, por cierto, es un hecho frecuente en la vida real, los problemas de PL a gran escala implican cientos de restricciones.

Región no acotada

A veces, un problema de programación lineal no tiene solución finita, lo cual significa que en un problema de maximización, por ejemplo, una o más variables de solución, y la utilidad, se pueden hacer infinitamente grandes sin contravenir ninguna restricción. Si se trata de resolver tal problema gráficamente, se observa que la región factible es abierta o no acotada.

Redundancia

La presencia de restricciones redundantes es otra situación común que sucede en formulaciones grandes de PL. La redundancia no causa mayores dificultades en la solución gráfica de problemas de PL, pero debería ser capaz de identificar su presencia. Una restricción redundante es simplemente una que no afecta la región de solución factible. En otras palabras, una restricción quizá sea más limitante o restrictiva que la otra y, por lo tanto, no es necesaria.

Soluciones óptimas múltiples

Un problema de PL puede, en ocasiones, tener dos o más soluciones óptimas múltiples. Gráficamente, este es el caso cuando la recta de isocosto o de isoutilidad de la función objetivo corre perfectamente paralela a una de las restricciones del problema o, en otras palabras, cuando tienen la misma pendiente.

Procedimiento Gráfico:

Lo máximo que podemos imaginarnos para graficar es tres dimensiones, en razón de que no tenemos otra experiencia, esto limita el uso de soluciones gráficas a prácticamente dos variables, por lo que su interés es fundamentalmente didáctico, ya que un problema real en el campo agropecuario puede plantear muchas más actividades (los modelos de campo reales en explotaciones mixtas más pequeños habitualmente tienen más de veinte variables), y resulta imposible abarcarlo con un enfoque gráfico.
Un primer paso consiste en graficar las restricciones, que representan el planteo técnico, en este primer momento la consideración es física, y se obtiene, graficando la ecuación de la recta como sigue:

$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 \leq b_1$ equivalente a $X_1 \leq (b_1 / a_{11}) - (a_{12} / a_{11}) X_2$

Esta restricción es de fácil graficar, se repite para cada restricción, quedando así, definido un campo donde todas las restricciones se cumplen, si este trabajo esta incluye restricciones que no pueden verificarse con las demás estamos ante un caso de "solución no factible", y se debe reformular el modelo, eliminando estas restricciones, si ello es posible en el interés del problema. Casi todas las restricciones en problemas de maximización son del tipo $\leq$.
Luego se hace un tratamiento similar con el caso de "Z" donde se asigna un valor arbitrario a la misma, en el texto lo llamaremos "VA" y queda:

$\max\ z = C_1 X_1 + C_2 X_2 = VA$ que es equivalente a $X_1 = (VA / C_1) - (C_2 / C_1) / X_2$

De esta expresión lo importante es conocer la pendiente de la recta isocontributiva o isobeneficios (C_2 / C_1) que se traslada en forma paralela hasta el sitio más alejado del origen de coordenadas y que pertenezca al polígono de factibilidad técnica. Que coincide con un vértice del polígono, es el óptimo, hay casos en los que coincide con un lado del polígono y tenemos una solución múltiple, o sea que existen varias.
A modo de ejemplo consideremos el gráfico del problema del teórico Práctico de dos actividades (variables) y tres restricciones:
Tanto en los planteos de maximización como de minimización de una función objetivo, el método gráfico consiste en representar gráficamente las inecuaciones de restricciones en un eje de coordenadas, siempre en el primer cuadrante por las condiciones de no negatividad.

La representación gráfica de las inecuaciones permite definir el campo de soluciones posibles en el polígono formado.

Definido el campo de soluciones posibles, se debe encontrar el valor extremo que puede alcanzar la FO representada como una recta (isobeneficio) en el campo de soluciones posibles. Lógicamente el valor extremo estará limitado por la frontera o límites del polígono del campo de soluciones posibles. Se lo encuentra haciendo tangente la línea de isobeneficio con algún punto del polígono de soluciones posibles. Las coordenadas de ese punto de tangencia constituyen la combinación que optimiza la asignación de los recursos en el problema planteado.

El costo de oportunidad de los recursos.

En la solución encontrada es posible que algunos de los recursos sean utilizados en su totalidad, es decir no hay sobrantes y una unidad en más de ellos podría mejorar el valor extremo de la FO a través de un ingreso marginal. En cambio habrá otros que no han sido usados en su totalidad y disponer de una unidad en más o menos de ellos no afectaría a la función objetivo.
Si se tratara de un planteo de maximizar los beneficios expresados como la sumatoria de los márgenes brutos de una serie de actividades posibles de producir, si en el plan óptimo existieran sobrantes de tierra o de agua, disponer de más de algunos de estos recursos no incrementaría beneficio alguno. Por este motivo los recursos sobrantes tienen un costo de oportunidad interno de la empresa igual a cero. En cambio entre los recursos escasos que se agotan en el plan óptimo, tendrán un costo de oportunidad mayor que cero.

Si llamamos $u_i = \frac{dZ}{di}$ al ingreso marginal o costo de oportunidad del recurso i, (también llamado precio sombra, shadow prices, precio de orden, precio de cuenta) la condición para que una actividad entre en el plan óptimo es que:

$$C_j \geq u_i a_{ij}$$

Es decir que el margen de contribución de la actividad j (el margen bruto) a la FO debe ser mayor que los recursos i valorados a su costo de oportunidad requeridos para la producción de una unidad de la actividad j. De lo contrario la actividad no entra en la solución y la diferencia o lo que le falta para cumplir con la condición es la medida en que el margen debiera aumentar para entrar en la solución (costo de sustitución) y que según su magnitud da una idea de la estabilidad del plan óptimo. Actividades con costo de sustitución bajos están indicando que tienen posibilidades de ser tenidas en cuenta y modificar el plan. Por lo contrario costos de sustitución altos dan mayor estabilidad a la solución encontrada.
Esa información es entregada por la mayoría de los programas que resuelven los problemas de programación lineal.

Bibliografía

EXCEL: Herramienta Solver , B. Loubet- Facultad de Ciencias Económicas- Universidad Nacional de Cuyo- Argentina
Introducción a la programación matemática J.J. Ruiz Universidad Complutense Madrid
Cordonnier Pierre et al. Economía de la Empresa Agrícola.
Programación Lineal – Cátedra de Economía Agraria – Facultad de Agronomía y Zootecnia – UNT
Investigación de operaciones Novena edición Hamdy A. Taha University of Arkansas, Fayetteville – 2012
Ejercicios de la PAU – Portal de Estadística Aplicada